

Problema de la Semana 34  
22 a 28 de octubre  
Categoría B

Sea  $ABC$  un triángulo tal que  $m\angle ABC = 2m\angle ACB$ . Establezca que:

a)  $AC^2 = AB^2 + AB \cdot BC$ ;

b)  $AB + BC < 2 \cdot AC$

**Solución**

Supongamos que  $\overline{BD}$  es la bisectriz del ángulo  $\angle ABC$ . Por el teorema de la bisectriz,

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(AB)(AC) &= (AB)(AD + DC) \\ &= (AB)(AD) + (AB)(DC) \\ &= (AB)(AD) + (BC)(AD) \\ &= (AB + BC)(AD),\end{aligned}$$

$$(AD) = (AC) \frac{(AB)}{(AB + BC)}. \quad (1)$$

Como  $m\angle ABC = 2m\angle ACB$ , los ángulos  $\angle ABD$  y  $\angle ACB$  son congruentes, al igual que los ángulos  $\angle ADB$  y  $\angle CBA$ , lo que implica que los triángulos  $ACB$  y  $ABD$  son semejantes.

Por lo tanto,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \quad \text{y} \quad (AB)^2 = (AC)(AD)$$

Sustituyendo en (1),

$$(AB)^2 = (AC)^2 \frac{AB}{AB + BC},$$

de donde,

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (AB)(BC).$$

Para la segunda parte, trace una paralela a la recta  $\overleftrightarrow{BD}$  por  $A$ . Llame  $E$  al punto de corte de la recta  $\overleftrightarrow{BC}$  con la paralela por  $A$ . Los siguientes ángulos son congruentes:

$$\angle EAB \cong \angle DBA \cong \angle ACE \cong \angle AEB$$

Por lo tanto,  $AB = BE$  y  $AE = AC$ . En consecuencia,

$$AB + BC = BE + BC = EC < AE + AC = 2 \cdot AC.$$

Esto termina la demostración.